COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(durée : 5 heures)

Les candidats sont invités à rédiger de manière claire et complète, mais en évitant les longueurs inutiles. Ils sont priés de mentionner s'ils admettent le résultat d'une question. Chacune des deux parties peut être traitée indépendamment de l'autre, mais certaines questions de la deuxième partie nécessitent le recours à des résultats énoncés dans la première partie. Par ailleurs, toutes les notations sont communes aux deux parties.

On rappelle les propriétés suivantes dont on ne demande pas la démonstration :

Etant donnés deux espaces vectoriels normés $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ et une application linéaire u de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue en tout point de E ;
(ii) u est continue en 0 ;
(iii) il existe $M \geq 0$ tel que :

(1) $\forall x \in E : \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Il existe une plus petite constante M telle que (1) soit vérifié, laquelle est appelée la norme de u : on définit ainsi, en effet, une norme sur l'espace des applications linéaires de E dans F (ce point n'est pas utilisé dans le problème).

Une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$ est appelée suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geq N$, on ait : $\| x_p - x_q \|_E < \varepsilon$.
On dit que E est complet pour $\| \|_E$ si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

PARTIE I

Comparaison d'espaces de fonctions et de normes

Notations :
Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $C^0(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I, à valeurs réelles. Pour tout réel $p \geq 1$, on considère l'ensemble $L^p(I)$ des fonctions $f \in C^0(I)$ telles que : $\int_I |f(x)|^p dx$ existe, cette intégrale pouvant être ordinaire ou généralisée.

Pour tout $f \in L^p(I)$ on note : $\| f \|_p = \left[\int_I |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$.

1 - a - Montrer que l'on a :

$$\forall t_1 > 0, \forall t_2 > 0 : (t_1 + t_2)^p \leq 2^{p-1} (t_1^p + t_2^p).$$

1 - b - Montrer que pour tout réel $p \geq 1$, l'ensemble $L^p(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On remarquera que si a et b sont deux réels tels que $a < b$, alors les deux ensembles $L^p([a, b])$ et $C^0([a, b])$ sont égaux.

2 - a - Montrer que $\| \|_1$ est une norme sur $L^1(I)$.

2 - b - Montrer que $\| \|_2$ est une norme d'espace préhilbertien réel sur $L^2(I)$.

Tournez la page S.V.P.

3 - a - Soient a et b deux réels tels que a < b ; prouver l'inclusion :

$$L^2([a, b[) \subset L^1([a, b[)$$

et montrer qu'elle est stricte.

3 - b - L'application i : $L^2([a, b[) \to L^1([a, b[)$, définie par i(f) = f, est-elle continue ?

4 - a - Soit a un réel ; prouver qu'aucun des espaces $L^1([a, +\infty[)$ et $L^2([a, +\infty[)$ n'est contenu dans l'autre, mais que si l'on note $B^p([a, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions bornées appartenant à $L^p([a, +\infty[)$, on a l'inclusion :

$$B^1([a, +\infty[) \subset B^2([a, +\infty[)$$

et montrer qu'elle est stricte.

4 - b - L'application j : $B^1([a, +\infty[) \to B^2([a, +\infty[)$, définie par j(f) = f, est-elle continue quand $B^1([a, +\infty[)$ (resp.$B^2([a, +\infty[)$) est muni de la norme $\| \|_1$ (resp.$\| \|_2$) ?

Notations :

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $L^\infty(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur I, à valeurs réelles. Pour tout $f \in L^\infty(I)$, on note :

$$\| f \|_\infty = \sup \{|f(x)| ; x \in I\} ;$$

on ne demande pas de montrer qu'on définit ainsi une norme sur $L^\infty(I)$.

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on note $C^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur I, à valeurs réelles, et H(I) l'ensemble des fonctions f de $C^1(I)$ telles que $\int_I |f(x)|^2 dx$ et $\int_I |f'(x)|^2 dx$ existent, ces intégrales pouvant être ordinaires ou généralisées.

Pour tout $f \in H(I)$ on note :

$$\| f \|_H = \left[\int_I |f(x)|^2 dx + \int_I |f'(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

5 - a - Montrer que H(I) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que $\| \|_H$ est une norme d'espace préhilbertien réel sur H(I).

On remarquera que si a et b sont deux réels tels que a < b, alors les deux ensembles H([a, b]) et $C^1([a, b])$ sont égaux.

5 - b - Montrer, pour tout $f \in H([a, b])$ et tout $x \in [a, b]$, les inégalités :

(1) $$|f(x) - f(a)| \leq \sqrt{x - a}\ \| f' \|_2 ;$$

(2) $$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{b - a}} \| f \|_2 + \sqrt{\frac{b - a}{3}}\ \| f' \|_2 .$$

(Pour établir (2), on pourra intégrer sur [a, b] la relation $f(a) = f(x) - \int_a^x f'(t)dt$ et permuter l'ordre des intégrations dans l'intégrale double).

5 - c - Expliciter trois constantes M_1, M_2 et M_3 telles que :

$$\forall f \in C^1([a, b]) : \| f \|_1 \leq M_1 \| f \|_2 \leq M_2 \| f \|_\infty \leq M_3 \| f \|_H$$

A SUIVRE

6 - a - On considère, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{n^3}\right] : f_n(x) = nx ;$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{n^3}, 1\right] : f_n(x) = \frac{1}{n^2} + \int_{1/n^3}^{x} t^{-1/3}\, dt .$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $C^1([0, 1])$ muni de $\| \|_H$. (On rappelle que la notion de suite de Cauchy est définie dans l'introduction).

6 - b - Montrer que $C^1([0, 1])$ n'est pas complet pour $\| \|_H$.

6 - c - $C^1([0, 1])$ est-il complet pour $\| \|_\infty$?

PARTIE II

Continuité par rapport au second membre de la solution d'une équation différentielle linéaire

Notations :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit c un réel strictement positif.

1 - a - Montrer que le problème

$$\begin{cases} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet, pour tout $f \in C^0(I)$, une solution unique y que l'on notera $\varphi(f)$.

1 - b - Montrer que $\varphi(f)$ est définie et de classe C^1 sur I, et que l'on a :

$$\forall x \in I : \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)\, dt.$$

1 - c - Soit δ la forme linéaire sur H(I) définie par : $\delta(f) = f(0)$.
Montrer que si φ est continue de $L^2(I)$ dans lui-même, alors φ définit une bijection linéaire continue de $L^2(I)$ dans Ker δ muni de la norme $\| \|_H$ dont la réciproque φ^{-1} est continue.

2 - Soient a et b deux réels tels que $a < 0 < b$.

2 - a - Montrer que φ est un endomorphisme continu de $C^0([a, b])$ dans chacun des trois cas suivants :

(i) $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\| \|_\infty$;
(ii) $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\| \|_1$;
(iii) $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\| \|_2$.

2 - b - Montrer que φ définit un endomorphisme continu de chacun des trois espaces $L^\infty([a, b[)$, $L^1([a, b[)$, $L^2([a, b[)$.

3 - Soit $f(x) = e^{-c|x|}$. Calculer $\varphi(f)$. En déduire que φ ne définit un endomorphisme d'aucun des trois espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$.

4 - On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Montrer que φ définit un endomorphisme continu de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, préciser sa norme (on rappelle que la norme d'une application linéaire continue est définie dans l'introduction).

Tournez la page S.V.P.

5 - Soit pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$.
5 - a - Calculer $\varphi(f_\lambda)$.
5 - b - Pour $I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, calculer $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

6 - Montrer que φ définit un endomorphisme continu de $L^1(\mathbb{R}_+)$ et préciser sa norme.

7 - a - Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et $g = \varphi(f)$ alors

$$\forall X > 0 : \frac{g(X)^2}{2} + c\int_0^X g(x)^2 dx = \int_0^X f(x)g(x)dx ;$$

en déduire que $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

7 - b - Montrer que φ définit un endomorphisme continu de $L^2(\mathbb{R}_+)$ et préciser sa norme.

8 - a - Soient $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et $g = \varphi(f)$, montrer que $g(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$; en déduire que $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

8 - b - L'application linéaire φ est-elle continue de $L^1(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$?

Notations :
Soit P (resp. Q) l'espace vectoriel des fonctions continues (resp. continûment dérivables) sur $\mathbb{R}$ de période 2π.
Pour tout $f \in P$, on pose :

$$\|f\|_P = \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}$$

et pour tout $f \in Q$, on pose :

$$\|f\|_Q = \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx + \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx\right]^{1/2} ;$$

on ne demande pas de montrer qu'on définit ainsi des normes sur P et Q.

9 - a - Montrer que pour tout $f \in P$, il existe une unique solution dans Q à l'équation $y' + cy = f$, notée $\psi(f)$.

9 - b - Expliciter les coefficients de Fourier de $\psi(f)$ en fonction de ceux de f. En déduire que ψ définit une bijection linéaire continue de P dans Q dont la réciproque est continue : préciser les normes de ψ et de ψ^{-1} .

9 - c - Déduire de ce qui précède et de la question **I - 5 - c** que la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique de classe C^1 converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers cette fonction.

FIN